কাই বর্গ বিন্যাস

কাই বর্গ বিন্যাস কি?

উত্তর:- একটি আদর্শ পরিমিত চলকের বর্গের বিন্যাসকে 1 (এক) স্বাধীনতার মাত্রা বিশিষ্ট χ^2 বিন্যাস বলে। সাধারণভাবে, $x_i (i=1,2,\dots,n)$ যদি μ_i গড় ও σ_i^2 ভেদাংক বিশিষ্ট n সংখ্যক স্বাধীন পরিমিত চলক হয় তবে $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

আদর্শ / পরিমিত / প্রমিত পরিমিত চলক :-

কোনো পরিমিত চলক হতে এর গড় বিয়োগ করে পরিমিত ব্যবধান দ্বারা ভাগ করলে প্রাপ্ত পরিবর্তিত রূপকে আদর্শ পরিমিত চলক বলে।

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

[x এর গড় μ
μ ,, পরিমিত ব্যবধান σ

---

* আদর্শ পরিমিত চলকের গড় 0 এবং ভেদাঙ্ক 1

$$E(z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[E(x) - E(\mu)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu]$$

$$= 0$$

$V(ax+c) = a^2 V(x)$

$$V(z) = V\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(x-\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} V(x) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

কাইবর্গ বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক উদ্ভাবন কর।

উত্তর:- মনেকরি, $x_1, x_2, \cdots x_n$ স্বাধীন n পরিমিত চলক যাদের প্রত্যেকের গড় শূন্য এবং ভেদাংক 1 তবে $\chi^2 = \sum x_i^2$ একটি n স্বাধীনতার মাত্রা বিশিষ্ট কাইবর্গ চলক।

এবং x_i এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x_i^2}; \quad -\infty < x_i < \infty$$

এখন χ^2 বিন্যাসের পরিবর্ত উৎপাদনকারী অপেক্ষক

$$M_{\chi^2}(t) = E(e^{t\chi^2})$$

$$= E\left[e^{t(\sum x_i^2)}\right]$$

$$= E\left[e^{t(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}\right]$$

$$= E\left[e^{tx_1^2 + tx_2^2 + \cdots + tx_n^2}\right]$$

$$= E\left[e^{tx_1^2} \cdot e^{tx_2^2} \cdots \cdots e^{tx_n^2}\right]$$

$$M_{\chi^2}(t) = E(e^{t\chi_1^2}) \cdot E(e^{t\chi_2^2}) \cdots E(e^{t\chi_n^2})$$

$$= M\chi_1^2(t) \cdot M\chi_2^2(t) \cdots M\chi_n^2(t)$$

$$= [M\chi_i^2(t)]^n$$

যেহেতু χ_i, $i = 1, 2, \ldots n$ স্বাধীন প্রমিত স্বাভাবিক চলরাশি

$$\therefore M_{\chi_i^2}(t) = E(e^{t\chi_i^2})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\chi_i^2} f(\chi_i)\, d\chi_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\chi_i^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\chi_i^2}\, d\chi_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-\frac{1}{2})\chi_i^2}\, d\chi_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{2t-1}{2}\right)\chi_i^2}\, d\chi_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(-1+2t)\chi_i^2}\, d\chi_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\chi_i^2}\, d\chi_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{1-2t}{2}}\right)^2 x_i^2} dx_i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{1-2t}{2}\right)^{1/2}} \quad \left| \because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{(1-2t)^{1/2}}{2^{1/2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{(1-2t)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow M_{x_i^2}(t) = (1-2t)^{-1/2}$$

অতএব, $M_{x^2}(t) = [M_{x_i^2}(t)]^n = (1-2t)^{-n/2}$

$$= \left(1 - \frac{t}{1/2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

যা $\frac{n}{2}$ এবং $\frac{1}{2}$ পরামিতি বিশিষ্ট গামা বিন্যাসের moment generating function এর অনুরূপ।

কাজেই moment generating function এর uniqueness ধর্ম অনুযায়ী x^2 ও গামা বিন্যাস মেনে চলে যার পরামিতি $\frac{1}{2}$ ও $\frac{n}{2}$।

$$f(x^2) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^2)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} e^{-x^2/2} \cdot (x^2)^{\frac{n}{2}-1}; \quad 0 < x^2 < \infty$$